Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017
ISBN No. 978-602-98559-3-7

BENTUK SOLUSI GELOMBANG BERJALAN PERSAMAAN $\Delta\Delta$ mKdV YANG DIPERUMUM

Notiragayu, R. Ruswandi, dan L. Zakaria

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung
Lampung-Indonesia
notiragaru@gmail.com

Abstract

Bentuk solusi gelombang berjalan dari sebuah sistem dinamik diskrit merupakan bentuk persamaan diskrit biasa (OδE) yang diturunkan dari bentuk parsialnya melalui sebuah transformasi. Persamaan $\Delta\Delta$-mKdV merupakan sebuah persamaan diskrit parsial (PδE) yang diturunkan dari persamaan mKdV versi kontinu. Dalam artikel ini akan dideskripsikan penurunan bentuk solusi gelombang berjalan dari bentuk persamaan $\Delta\Delta$-mKdV yang diperumum.

Subject Classification: 37J10, 37J35,39A11,70K43
Keywords: Persamaan $\Delta\Delta$-mKdV yang diperumum, Matriks Lax, Solusi Gelombang Berjalan.

1 Pendahuluan

Sebuah upaya untuk dapat mengkaji lebih banyak dinamika yang terjadi dari sebuah sistem dinamik diskrit dapat dilakukan dengan memperumum bentuk standard sistem dengan cara memperbanyak parameternya. Dalam kertas kerja ini, selain memperlihatkan proses memperumum sistem dinamik $\Delta\Delta$-mKdV melalui modifikasi parameter pada pasangan matrik Lax juga diperlihatkan proses penurunan persamaan $\Delta\Delta$-mKdV yang diperumum untuk sebuah solusi gelombang berjalan serta bentuk-bentuk invarian (integral) yang dinormalkan. Dalam artikel Quispel dan kawan-kawan ([1]), sebuah persamaan $\Delta\Delta$-mKdV pada latis 2D ($\mathbb{Z}^2$) didefinisikan sebagai

$$q\left(V_{l,m+1}V_{l+1,m+1} - V_{l,m}V_{l+1,m}\right) = p\left(V_{l+1,m}V_{l+1,m+1} - V_{l,m}V_{l,m+1}\right), \qquad (1)$$

dimana medan-medan V didefinisikan pada sisi-sisi latis $l, m \in \mathbb{Z}$ yang merupakan dua peubah diskrit. Misalkan $\xi_{l,m}(k)$ menyatakan vektor yang mengandung fungsi gelombang yang bergantung kepada sebuah parameter spektral k. Persamaan di atas dapat diturunkan melalui pemetaan-pemetaan berikut ini

$$\begin{aligned} \xi_{l+1,m}(k) &= \tfrac{1}{p-k} M^{\text{hor}}_{l,m}\ \xi_{l,m}(k) \\ \xi_{l,m+1}(k) &= \tfrac{1}{q-k} M^{\text{vert}}_{l,m}\ \xi_{l,m}(k) \end{aligned}$$

dengan

$$M_{l,m}^{\text{hor}} = \begin{pmatrix} p & -V_{l+1,m} \\ -\left(\frac{k^2}{V_{l,m}}\right) & p\left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}}\right) \end{pmatrix} \text{ dan } M_{l,m}^{\text{vert}} = \begin{pmatrix} q & -V_{l,m+1} \\ -\frac{k^2}{V_{l,m}} & q\frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}.$$

merupakan matriks pasangan Lax. Pemetaan ini terdefinisi dengan baik apabila dipenuhi kondisi berikut.

$$\left(M_{l+1,m}^{\text{vert}} M_{l,m}^{\text{hor}} - M_{l,m+1}^{\text{hor}} M_{l,m}^{\text{vert}}\right) \boldsymbol{\xi}_{l,m} = 0, \tag{2}$$

untuk semua $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$.

Kondisi 2 dikenal dengan sebutan *compatibility condition*.

2 HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Memperumum Persamaan $\Delta\Delta$-mKdV

Tuwankotta dan Quispel (2012), telah melakukan upaya memeperumum sebuah sistem dinamik diskrit melalui upaya memperbanyak parameter pada pasangan matriks Lax sistem tersebut. Hal ini bertujuan agar dalam mengkaji lebih banyak dinamika yang terjadi dari sebuah sistem dinamik diskrit sifat keterintegralan sistem senantiasa dipertahankan, (lihat [3] dan [4]). Dengan prosedur yang sama, berikut diperlihatkan upaya memperumum (1).
Pandang pasangan matriks Lax berikut ini

$$P_{l,m}^{\text{hor}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p & -\alpha_2 V_{l+1,m} \\ -\alpha_3\left(\frac{k^2}{V_{l,m}}\right) & \alpha_4 p\left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}}\right) \end{pmatrix} \text{ dan } P_{l,m}^{\text{vert}} = \begin{pmatrix} \beta_1 q & -\beta_2 V_{l,m+1} \\ -\beta_3\frac{k^2}{V_{l,m}} & \beta_4 q\frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dengan *compatibility condition*, empat persamaan nonlinear berikut akan diperoleh

$$\begin{cases} k^2\left(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3\right) V_{1+l,1+m} & = & 0 \\ -k^2\left(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3\right) & = & 0 \\ p\alpha_1\beta_2 V_{l,m} V_{l,1+m} - q\alpha_2\beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m} + & & \\ q\alpha_2\beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m} - p\alpha_4\beta_2 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m} & = & 0 \\ -k^2\left(p\alpha_1\beta_3 V_{l,m} V_{l,1+m} - q\alpha_3\beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m}\right) - & & \\ k^2\left(p(q\alpha_3\beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m} - p\alpha_4\beta_3 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m})\right) & = & 0. \end{cases} \tag{4}$$

Agar konsisten satu dengan lainnya, maka parameter α_j dan β_j dengan $j = 1, 2, 3, 4$ dalam persamaan (4) harus konsisten.
Akibatnya, dari dua persamaan pertama diperoleh

$$\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 = 0. \tag{5}$$

Selain itu, dari dua persamaan terakhir dalam (4) diperoleh:

$$q(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)(\beta_1 V_{l,m}V_{1+l,m} - \beta_4 V_{l,1+m}V_{1+l,1+m}) = 0. \tag{6}$$

Dari hubungan (5), persamaan (6) menjadi konsisten apabila $\alpha_2 = \alpha_3$ dan $\beta_2 = \beta_3$. Dengan demikian sistem dengan matriks Lax (3) akan konsisten jika $\alpha_2 = \alpha_3$ dan $\beta_2 = \beta_3$. Misalkan,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \beta_4).$$

Akibatnya, matriks Lax untuk sistem (1) yang diperumum dapat ditulis sebagai

$$P^{\text{hor}}_{l,m} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p & -\alpha_2 V_{l+1,m} \\ -\alpha_2\left(\frac{k^2}{V_{l,m}}\right) & \alpha_4 p\left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}}\right) \end{pmatrix} \text{ dan } P^{\text{vert}}_{l,m} = \begin{pmatrix} \beta_1 q & -\beta_2 V_{l,m+1} \\ -\beta_2\frac{k^2}{V_{l,m}} & \beta_4 q\frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}.$$

Dengan mensubsitusikan $P^{\text{hor}}_{l,m}$ dan $P^{\text{ver}}_{l,m}$ ke dalam kondisi kompatibel (2) maka akan diperoleh bentuk pemetaan-pemetaan yang diturunkan dari persamaan $\Delta\Delta$-mKdV yang diperumum (generalized $\Delta\Delta$-mKdV) yang tidak lain merupakan sebuah bagian dari keluarga pemetaan empat parameter, yakni

$$\theta_1 V_{l,m}V_{l,m+1} - \theta_2 V_{l+1,m}V_{l+1,m+1} - \theta_3 V_{l,m}V_{l+1,m} + \theta_4 V_{l,m+1}V_{l+1,m+1} = 0, \tag{7}$$

dengan $\theta_1 = \alpha_1\beta_2 p$, $\theta_2 = \alpha_4\beta_2 p$, $\theta_3 = \alpha_2\beta_1 q$ dan $\theta_4 = \alpha_2\beta_4 q$.

2.2 Solusi Gelombang Berjalan $\Delta\Delta$-mKdV yang Diperumum

Dalam artikel ([4]) telah dideskripsikan secara lengkap penurunan persamaan $\Delta\Delta$-sine Gordon untuk keadaan solusi gelombang berjalan. Dengan prosedur serupa, solusi gelombang berjalan dari (7) dapat diperoleh.
Pandang, hubungan solusi gelombang berjalan diskrit berikut:

$$V_{l,m} = V_n, \text{ dengan } n = z_1 l + z_2 m.$$

dengan z_1 dan z_2 merupakan bilangan bulat yang relatif prima. Mensubsitusikan ketentuan tersebut ke dalam (7) diperoleh

$$\theta_1 V_n V_{n+z_2} - \theta_2 V_{n+z_1}V_{n+z_1+z_2} - \theta_3 V_n V_{n+z_1} + \theta_4 V_{n+z_2}V_{n+z_1+z_2} = 0 \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan bentuk solusi gelomang berjalan dari $\Delta\Delta$-mKdV yang diperumum. Untuk z_1 dan z_2 yang ditetapkan, persamaan (8) merupakan sebuah pemetaan dari $\mathbb{R}^{z_1+z_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{z_1+z_2}$. Dapat diperiksa bahwa persamaan (8) invarian untuk suatu transformasi $z_1 \longrightarrow -z_1, p \longrightarrow -p$, dan $z_1 \longleftrightarrow z_2$.

Selain itu ia juga memenuhi sifat keperiodikan, yakni $(i + z_2, j - z_1)$. Persamaan (8) ekivalen dengan pemetaan

$$\begin{aligned} V'_{z_1+z_2-1} &= \frac{V_0\big(\theta_3 V_{z_1} - \theta_1 V_{z_2}\big)}{\big(\theta_4 V_{z_2} - \theta_2 V_{z_1}\big)} \\ V'_{z_1+z_2-2} &= V_{z_1+z_2-1} \\ &\vdots \\ V'_1 &= V_2 \\ V'_0 &= V_1 \end{aligned} \tag{9}$$

Dapat dicatat bahwa pemetaan dalam [1] dapat diperoleh dari (9) dengan menetapkan $\theta_1 = \theta_2 = p$ dan $\theta_3 = \theta_4 = q$.

3 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan yang telah dikemukakan dalam bagian sebelumnya dapat disimpulkan bahwa bentuk solusi gelombang berjalan yang diperoleh dari pemetaan-pemetaan yang diturunkan dari persamaan ΔΔ-mKdV yang diperumum (*generalized* ΔΔ-mKdV) dapat diturunkan dengan terlebih dahulu menurunkan bentuk persamaan ΔΔ-mKdV yang diperumum (*generalized* ΔΔ-mKdV) yang merupakan sebuah bagian dari keluarga pemetaan empat parameter sebagai sebuah hasil pengembangan bentuk standar ΔΔ-mKdV yang melibatkan dua parameter.

Acknowledgment

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dekan FMIPA Unila dan Ketua LPPM Unila atas dukungan dana yang diberikan melalui DIPA FMIPA Unila Tahun 2017.

References

[1] Quispel, G.R.W., Capel, H.W., Papageorgiou, V.G., Nijhoff, F.W. (1991) *Integrable mappings derived from soliton equations*, Physica A **173** , pp. 243–266.

[2] Roberts, J.A.G., Iatrou A., and Quispel,G.R.W., (2002) *Interchanging parameters and integrals in dynamical systems: the mapping case*, J.Phys.A: Math. Gen., **35**, 2309-2325.

[3] Tuwankotta J., and Quispel, G., Dynamics Of 2-Dimensional Maps Derived From A Discrete Sine-Gordon Equations, 2012, Unpublished.

[4] Zakaria L., and Tuwankotta, J.M., (2016): Dynamics and Bifurcations in a Two-Dimensional Maps Derived From a Generalized $\Delta\Delta$ sine-Gordon Equation, *Far East Journal of Dynamical Systems*, **28(3)**, pp 165–194.