MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* NON HOMOGEN DENGAN FUNGSI GREEN

Fathurrohman Al Ayubi[1], Dorrah Aziz, dan Muslim Ansori
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Jl. Prof. Soemantri Bodjonegoro No. 1, Bandar Lampung 35145
alfathur26@gmail.com[1]

ABSTRAK

Dalam penelitian ini akan disajikan bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-n non homogen dengan fungsi Green melalui transformasi Laplace. Solusi umum dari persamaan diferensial linear orde-n non homogen terdiri dari solusi homogen dan solusi non homogen. Solusi non homogen sering juga disebut solusi partikulir. Selanjutnya dari solusi partikulir ini dapat diselesaikan dengan fungsiGreen melalui transformasi Laplace. Berdasarkan hasil penelitian ini, didapat bahwa persamaan diferensial linear orde-n non homogen dapat diselesaikan dengan fungsi Green melalui transformasi Laplace. Solusi umum yang diperoleh yaitu :

$$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$$

***Kata Kunci**: Persamaan Diferensial Linear Orde-n Non Homogen, Fungsi Green, Transformasi Laplace*

1. PENDAHULUAN

Latar Belakang

Matematika adalah salah satu ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. Matematika mempunyai peranan penting untuk ilmu pengetahuan lain seperti kimia, biologi, fisika, ekonomi, dan lain-lain. Salah satu ilmu matematika yang mempunyai peranan penting dengan ilmu pengetahuan lainnya adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan turunannya. Menurut peubah bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (satu variabel) dan persamaan diferensial parsial (dua atau lebih variabel). Persamaan diferensial biasa dapat dibagi menurut kelinieran, orde, dan koefisiennya [1]. Persamaan diferensial yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan.

Persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan sering kali diselesaikan dengan beberapa metode penyelesaian, antara lain: metode koefisien tak tentu, metode invers operator, dan lain-lain. Selain metode-metode tersebut masih ada cara lain untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan, yaitu dengan metode fungsi Green [2].

Metode fungsi Green adalah metode penyelesaian yang dalam proses menemukan penyelesaian suatu persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan, terlebih dahulu ditentukan nilai fungsi Green dari suatu persamaan diferensial tersebut. Nilai fungsi Green dapat ditemukan dengan menggunakan transformasi Fourier, transformasi Laplace, dan variasi parameter [2].

Berdasarkan latar belakang di atas, pada penelitian ini digunakan metode fungsi Green dalam penyelesaian suatu persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan melalui transformasi Laplace.

Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen melalui transformasi Laplace?

Tujuan

Tujuan dari penelitianini adalahmengetahui cara menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan menggunakan metode fungsi Green melalui transformasi Laplace.

2. LANDASAN TEORI

Definisi 1. Persamaan Diferensial Linear Orde-*n* Non Homogen

Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde-n non homogen yaitu :

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

dimana$a_i(x)(i = 0, 1, \ldots, n-1, n)$ konstan, $g(x) \neq 0$, dan semua nilai dari

$y, y', \ldots, y^{n-1}$, dan y^ndengan selang $x > 0$ dan $\frac{f(x)}{a_n(x)} = \emptyset(x)$[1].

Definisi 2. Fungsi Green

Fungsi $\boldsymbol{G}(x,t)$ dari persamaan

$$a_n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2}$$

dikatakan fungsi Green untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

1. $\boldsymbol{G}(x,t)$ terdefinisi pada daerah $R = I \times I$ dari semua titik (x,t) dengan x dan t terletak pada selang I.
2. $\boldsymbol{G}(x,t)$, $\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial x^n}$, merupakan fungsi kontinu pada $R = I \times I$.
3. Untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $f \in C(I)$, fungsi $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt$

   adalah solusi persamaan diferesial (1) yangmemenuhi kondisi awal

   $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \cdots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$ [3]

Definisi 3. Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t terdefinisi untuk $t > 0$. Kemudian $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, jika ada dinamakan transformasi suatu fungsi dari s, katakan $F(s)$. Fungsi $F(s)$ ini dinamakan transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinotasikan oleh

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3}$$

Operasi yang baru ditunjukkan yang menghasilkan $F(s)$ dari suatu fungsi $f(t)$ yang diberikan, disebut transformasi Laplace [3].

Definisi 4. Transformasi Laplace Invers

Jika $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ dinamakan transformasi Laplace Invers dari $F(s)$ dan dinotasikan dengan $f(t) = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\{F(s)\}$. Kemudian untuk mencari $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\{F(s)\}$ kita harus mencari suatu fungsi dari t yang transformasi Laplacenya adalah $F(s)$ [4].

Definisi 5. Konvolusi [1]

Konvolusi dari dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{4}$$

3. METODOLOGI PENELITIAN

Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur dengan mengkaji jurnal-jurnal dan buku-buku teks yang berkaitan dengan bidang yang teliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Transformasi Laplace pada kedua sisi dari persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen, sehingga diperoleh $Y(s)$.
2. Mengambil transformasi Laplace invers untuk memperoleh $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\{Y(s)\}$.
3. Dengan menggunakan teorema Konvolusi, diperoleh solusi umum fungsi Green persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen, akan ditunjukan bahwa fungsi Green $\boldsymbol{G}(x,t)$ untuk persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen [1].

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan persamaan diferensial linear orde-n non homogen dengan koefisien konstan:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{5}$$

Solusi umum untuk persamaan (5) adalah :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{6}$$

Dengan $y_h(x)$ merupakan solusi umum persamaan diferensial homogennya dan $y_p(x)$ merupakan solusi khususnya atau transformasi Laplace [4].

Untuk memperoleh solusi khusus $y_p(x)$persamaan diferensial linear orde-n non homogen maka dilakukan trasnformasi Laplace pada kedua sisi persamaan (5):

$$a_n(x)\mathcal{L}(y^n) + a_{n-1}(x)\mathcal{L}(y^{(n-1)}) + \cdots + a_1(x)\mathcal{L}(y') + a(x)\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\big(g(x)\big) \quad (7)$$

di mana

$$\mathcal{L}\big(y^n(x)\big) = s^nY(s) - s^{(n-1)}y(0) - s^{(n-2)}y'(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \quad (8)$$

$$\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(x)\right) = s^{(n-1)}Y(s) - s^{(n-2)}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \quad (9)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\big(y'(x)\big) = sY(s) - y(0) \quad (10)$$

$$\mathcal{L}\big(y(x)\big) = Y(s). \quad (11)$$

Misalkan diberikan kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ yaitu:

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}$$

Substitusikan kondisi awal ke persamaan (8), (9),dan (10) untuk menyederhanakan persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\big(y^n(x)\big) = s^nY(s) - c_0s^{(n-1)} - c_1s^{(n-2)} - \cdots - c_{n-2}s - c_{n-1} \quad (12)$$

$$\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(x)\right) = s^{(n-1)}Y(s) - c_0s^{(n-2)} - \cdots - c_{n-2}s - c_{n-1} \quad (13)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\big(y'(x)\big) = sY(s) - c_0 \quad (14)$$

$$\mathcal{L}\big(y(x)\big) = Y(s) \quad (15)$$

Jika $c_0, c_1, \dots, c_n$ adalah konstanta-konstanta yang diketahui adalah nol maka persamaan (12), (13), dan (14) menjadi

$$\mathcal{L}\big(y^n(x)\big) = s^n.Y(s) \quad (16)$$

$$\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(x)\right) = s^{(n-1)}.Y(s) \quad (17)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\big(y'(x)\big) = s.Y(s) \quad (18)$$

$$\mathcal{L}\big(y(x)\big) = Y(s). \quad (19)$$

Substitusikan persamaan (16), (17), (18), dan (19) ke persamaan (7).

Sesuai dengan definisi 3 bahwa $\mathcal{L}\big(f(x)\big) = F(s)$ maka persamaan (7) menjadi

$$a_n(x)s^nY(s) + a_{n-1}(x)s^{(n-1)}Y(s) + \cdots + a_1(x)sY(s) + a_0(x)Y(s) = F(s)$$

$$\big[a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)s + a_0(x)\big]Y(s) = F(s)$$

$Y(s) = F(s)\frac{1}{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)s + a_0(x)}$ (20)

Misalkan untuk $\frac{1}{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)s + a_0(x)} = G(s)$ maka

$Y(s) = F(s).G(s)$ (21)

Diketahui $Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\big(y(x)\big)$.

Berdasarkan definisi transformasi Laplace bahwa $Y(s)$dan $F(s)$ adalah transformasi Laplace dari $y(x)$ dan $f(x)$. Sudah pasti $F(s)$diketahui dan persamaan (21) kebalikan dari $y(x)$.

Karena persamaan (5) untuk $x > 0$ maka solusi khusus dari persamaan (5) dapat dicari menggunakan Teorema Konvolusi sehingga didapatkan:

Diketahui :

$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$ dan $G(s) = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv$

Maka

$$F(s).G(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du\,.\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv$$

$$F(s).G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)\, g(v)dudv$$

Misal : $u + v = t\,; v = t - u$

$$F(s).G(s) = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st} f(u)\, g(t-u)dudt$$

$$F(s).G(s) = \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left[\int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du\right]dt$$

$$F(s).G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]$$

$$F(s).G(s) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Jadi, solusi partikuler untuk persamaan diferensial orde-*n*non homogen dengan koefisien konstan adalah:

$$y_p(x) = F(x).W(x) = \int_0^x f(t).w(x-t)dt \quad (22)$$

Jadi solusi umum dari persamaan (5) adalah

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(x) = y_h(x) + F(x).G(x)$$

$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$ (23)

5. SIMPULAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan bahwa persamaan diferensial non homogen orde-*n*dengan koefisien konstandapat diselesaikann dengan fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Laplace. Solusi umum dari persamaan diferensial non homogen orde-*n* dengan koefisien konstan adalah:

$$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$$

Saran

Pada penelitian ini, fungsi Green yang dibahas dalam penelitian ini hanyalah fungsi Green dari persamaan diferensial non homogen orde-*n* dengan koefisien konstan, di mana untuk mendapatkan fungsi Green menggunakan metode transformasi Laplace. Untuk itu, diperlukan pengembangan lebih lanjut tentang fungsi Green dan cara mendapatkan fungsi Green. Misalnya mencari fungsi Green dari persamaan diferensial parsial dengan metode transformasi Fourier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alwi, Wahidah, dkk. 2015. Fungsi Green Yang Dikontruksikan Pada Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde-n. *Jurnal MSA*. Vol. 3, No.1, Januari-Juni 2015. UINAM, Makassar.

[2] Bronson, R. dan Costa, G. 2003. *Persamaan Diferensial*. Erlangga, Jakarta.

[3] Kartono. 2002. *Penuntun BelajarPersamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

[4] Djauhari, Eddy. 2015. Membangun Fungsi Green Dari Persamaan Linear Non Homogen Tingkat-n. *Jurnal Matematika Integratif* . Vol. 11, No.2, Oktober 2015. Universitas Padjadjran, Bandung.