

DESAIN KONTROL MODEL SUHU RUANGAN

¹Zulfikar Fakhri Bismar dan ²Aang Nuryaman
^{1,2} Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Email: ¹zulfikar.fb95@gmail.com dan ²aangnuryaman@gmail.com

ABSTRAK

Pada paper ini, akan dikaji model pengendalian suhu di sebuah ruangan dengan variabel terkait adalah suhu ruangan, suhu kaca termometer, dan suhu air raksa. Dengan menggunakan model hasil linierisasi di sekitar titik kesetimbangan, dikonstruksi kontrol input yang mungkin agar suhu ruangan sesuai dengan yang diinginkan. Profil dari dinamik model hasil linierisasi akan disimulasikan secara numerik untuk beberapa alternatif kontrol dan nilai parameter berbeda.

Kata Kunci : Suhu, Ruangan, Kontrol Input, Linierisasi.

1. PENDAHULUAN

Ruangan yang nyaman diperlukan untuk melakukan berbagai aktivitas sehari-hari. Untuk membuat keadaan ruangan menjadi nyaman, salah satu acuannya untuk kenyamanan suatu ruangan adalah suhu pada ruangan tersebut. Karena suhu ruangnya terlalu panas ataupun terlalu dingin, mempersulit seseorang untuk melakukan aktivitas di dalam ruangan tersebut sebagaimana mestinya. Untuk itu, diperlukan model pengendalian suhu ruangan yang baik agar suhu pada ruangan tersebut dapat dinikmati sesuai yang diinginkan. Alat yang mengendalikan suhu ruangan terletak pada katup udara pada ruangan. Model yang akan dibuat merupakan model untuk mencari pengaturan pada katup udara yang terbaik untuk membuat suhu ruangan dapat dinikmati untuk beraktivitas sebagaimana mestinya.

2. LANDASAN TEORI

Pemodelan sistem dinamik didefinisikan sebagai pembuatan model yang bergantung terhadap waktu untuk sistem fisis. Model sistem dinamik merupakan salah satu tipe model yang sangat vital untuk merepresentasikan bagaimana suatu sistem bekerja dan berubah keadaannya dari waktu ke waktu. Gagasan dari pemodelan sistem dinamik yaitu untuk digunakan sebagai suatu hipotesis yang perlu dibuktikan pada konteks fenomena yang terjadi di dunia [1].

Sistem kontrol merupakan sistem dinamik yang menggabungkan *input* kontrol yang didesain untuk mencapai tujuan pengontrolan. Sistem kontrol merupakan dimensi yang terbatas jika ruang fasenya (contohnya ruang vektor atau semacamnya) merupakan dimensi yang terbatas. Waktu yang kontinu pada sistem kontrol dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t); u(t)), \quad x \in X, u \in U, \text{ dan } t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Dengan $x \in X$, melambangkan keadaan pada sistem, sedangkan $u \in U$, X dan U merupakan himpunan terbuka dengan $X \subset \mathbb{R}^n$ dan $U \subset \mathbb{R}^m$ melambangkan *input* pada sistem. pemetaan fungsi $f : X \times U \rightarrow U$ merupakan fungsi nonlinier yang mendekati solusi analitik dari suatu sistem kontrol. $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ sebagai laju perubahansuhu ruangan. [2].

Model ruang keadaan atau *state-space model* ditetapkan oleh tiga matriks A, B dan C. ketiga matriks ini dinamakan matriks sistem, ditambah dengan matriks *co-variant* dari vektor gangguan dari luar. Didalam kerangka gambaran Ruang Keadaan terdapat banyak variasinya. Salah satu bentuk umum Ruang Keadaan yang sering digunakan adalah.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3)$$

Dengan vektor *input* \mathbf{u} , vektor \mathbf{x} disebut vektor keadaan. Persamaan yang pertama menentukan bagaimana vektor-vektor tersebut terhubung secara halus dengan data $\dot{\mathbf{y}}$ yang berubah dari waktu ke waktu. Matriks A sendiri merupakan matriks dinamik dan nilai eigen dari A sangat penting dan menentukan bagaimana sistem bekerja. Persamaan kedua adalah persamaan observasi yang menentukan hubungan antara data dengan vektor keadaan \mathbf{x} tersebut [3].

Suatu sistem dikatakan terkontrol dengan baik pada waktu t_0 jika untuk setiap keadaan $\mathbf{x}(t_0)$ pada suatu model ruang keadaan dan setiap $\mathbf{x}(t_1)$ pada model tersebut, terdapat waktu dengan $t_1 > t_0$ serta *input* $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ sehingga akan memindahkan keadaan $\mathbf{x}(t_0)$ menjadi keadaan $\mathbf{x}(t_1)$ pada waktu t_1 . Lain dari itu, maka sistem dapat dikatakan tidak terkontrol pada waktu t_0 . Sifat keterkontrolan merupakan sifat yang menghubungkan antara *input* dan keadaan benda. Oleh karena itu, sifat ini akan melibatkan matriks A dan B pada sistem pengendalian suhu ruangan. Dari definisi keterkontrolan, dapat diamati jika sistem dapat terkontrol, berarti suhu ruangan dapat diperlakukan atau dikendalikan sesuai keinginan. Akan tetapi, jika suatu sistem bukan sistem yg terkontrol, maka suhu ruangan tidak akan dapat dikembalikan menuju kesetimbangan sesuai yang diinginkan. Sistem pengendalian suhu ruangan dikatakan terobservasi pada waktu t_0 jika untuk setiap $\mathbf{x}(t_0)$ pada waktu t_0 pada suatu model ruang keadaan, terdapat waktu t_1 dengan $t_1 > t_0$ sehingga *input* $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ dan *output* $\mathbf{y}_{[t_0, t_1]}$ cukup untuk menentukan keadaan $\mathbf{x}(t_0)$. Selain dari itu, sistem tersebut dikatakan tidak terobservasi pada waktu t_0 [4].

^[5] Suatu sistem kontrol didefinisikan dengan

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4)$$

pernyataan diatas ekuivalen dengan :

1. Sistem (2.9) terkontrol.
2. $\text{Rank}(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n$ [5].

Pada persamaan (2.2) dan (2.3) dengan $\dim(\mathbf{x}) = n$, sistem tersebut dapat dikatakan sistem terkontrol (terkontrol) jika $\text{rank}(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n$, serta dapat dikatakan terobservasi jika $\text{rank}(\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T) = n$.

Permasalahan mengenai keterkendalian suatu sistem pada umumnya secara matematis jika diberikan keadaan awal $\mathbf{x}_0 \in X$, keadaan terakhir $\mathbf{x}_T \in X$, dan waktu $T > 0$ digambarkan sebagai berikut. [1]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5)$$

Memenuhi $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$.

Posisi titik *equilibrium* untuk sistem diatas adalah titik $\bar{x} \in X$ sehingga terdapat nilai $\bar{u} \in U$ (khususnya bernilai nol) sedemikian sehingga $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Hukum umpan balik kestabilan asimtotik adalah fungsi $k: X \rightarrow U$ dengan $k(\bar{x}) = \bar{u}$, sehingga sistem (2.10) berubah menjadi.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{k}(\mathbf{x})) \quad (6)$$

Yang diperoleh dengan memasukkan *input* kontrol (2.12) pada persamaan (2.10).

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}(t)) \quad (7)$$

Jika x bergerak mendekati nol sebagaimana $t \rightarrow \infty$. Keadaan $x(t)$ yang terbentuk dari hukum umpan balik ini merupakan fungsi kontinu, yang berarti solusi dari persamaan (2.11) untuk setiap fungsi $x(t)$ yang berlaku untuk semua t [2].

Bentuk umum dari model ruang keadaan memiliki bentuk lain sebagai berikut.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (8)$$

Terdapat kriteria kestabilan sistem sederhana yang hanya bergantung pada nilai eigen $\lambda_{1,2}$ pada matriks A . Jika semua nilai eigen memiliki bagian nilai real negatif, maka setiap solusi yang terbentuk akan bergerak mendekati nol sebagaimana $t \rightarrow \infty$, dan solusi trivial tersebut menunjukkan bahwa sistem dapat dikatakan stabil asimtotik. Jika satu saja nilai eigen memiliki bagian nilai real positif, maka beberapa solusi akan bergerak menjauhi titik *equilibrium* membentuk kurva eksponensial, sehingga menimbulkan sistem yang tidak stabil [6].

3. METODOLOGI PENELITIAN

Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan pada Semester Ganjil Tahun Ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

Metode Penelitian

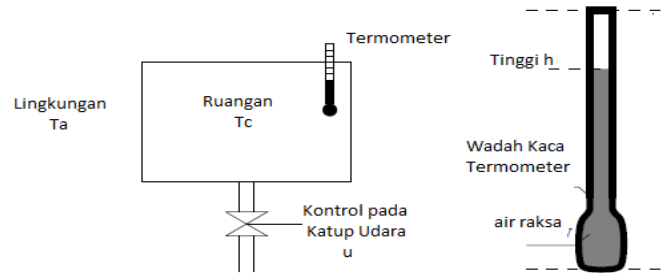
Penelitian ini dilakukan secara simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB[®]. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat model matematika sistem dinamik dari suhu ruangan dengan menggunakan relasi dinamik berdasarkan asumsi yang ditetapkan.
2. Menentukan titik equilibrium suhu ruangan beserta titik equilibrium untuk tinggi air raksa.
3. Mengkaji respon step untuk melihat respon yang terjadi tanpa kontrol input.
4. Menentukan beberapa alternatif kontrol dengan memvariasikan parameter yang terkait dengan input kontrol tersebut.
5. Mensimulasikan sistem yang sudah diberi kontrol *input* serta memvariasikan parameter yang terkait dengan kontrol *input* untuk melihat apa yang terjadi pada sistem.
6. Menginterpretasikan hasil yang didapat dan kemudian mengambil kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Dinamik

Pada pembahasan ini dirancang suatu model kontrol suhu ruangan, yang bertujuan untuk menganalisa kontrol pada katup udara yang berfungsi mengendalikan laju aliran panas pada ruangan tersebut. Adapun pengaturan pada katup udara tersebut ditinjau berdasarkan pengukuran dari termometer. Suhu dari ruangan tersebut juga dipengaruhi oleh suhu lingkungan. Termometer yang digunakan yaitu termometer raksa. Pengukuran suhu tidak diketahui langsung dari suhu ruangnya, melainkan dengan memperhatikan tinggi air raksa pada termometer. Adapun gambaran kontrol suhu ruangan yang terjadi antara lain seperti pada gambar berikut.



Gambar 1. Kontrol suhu udara pada ruangan.

Berdasarkan gambar diatas, akan dibentuk model dinamik yang terjadi pada ruangan tersebut. Berikut merupakan variabel nyata, variabel-variabel pokok yang akan dimodelkan.

- u : Input kontrol pada katup udara (variabel kontrol).
- T_a : Suhu lingkungan (sebagai factor gangguan dari luar).
- T_c : Suhu ruangan (variabel yang dikontrol atau sebagai output).
- h : Tinggi raksa pada termometer (variabel yang diukur).

Untuk mendapatkan model yang sesuai, diperhatikan relasi antara variabel-variabel pokok, untuk mengetahuinya, diperlukan beberapa variabel-variabel bantu. Antara lain yaitu.

- q : Nilai kalor yang berpindah dari katup udara menuju ruangan.
- q_a : Nilai kalor yang berpindah dari lingkungan menuju ruangan.
- q_g : Nilai laju perpindahan panas dari wadah termometer menuju ruangan.
- q_{Hg} : Nilai laju perpindahan panas dari air raksa menuju wadah termometer.
- T_g : Suhu wadah termometer.
- T_{Hg} : Suhu pada air raksa.
- A_g : Luas penampang wadah termometer.
- V_g : Volume bagian dalam wadah termometer.
- V_{Hg} : Volume air raksa.

Sehingga didapatkan relasi antarvariabel sebagai berikut.

$$q = a_0 u,$$

$$q_a = a_1(T_a - T_c), \quad q_g = a_2(T_c - T_g), \quad q_{Hg} = a_3(T_g - T_{Hg}),$$

$$\frac{dT_c}{dt} = b_1(q_a + q), \quad \frac{dT_g}{dt} = b_2(q_g + q_{Hg}), \quad \frac{dT_{Hg}}{dt} = b_3 q_{Hg} \quad (9)$$

Dengan a_0, a_1, a_2, a_3 merupakan konstanta satuan termal yang bernilai positif, $b_1, b_2,$ dan b_3 merupakan konstanta satuan laju perpindahan panas per detik yang bernilai positif. Bentuk relasi diatas mengasumsikan bahwa nilai laju perpindahan panas dari katup udara menuju ruangan berbanding lurus dengan kontrol pada katup udara. Laju perubahan suhu pada ruangan berkaitan dengansuhu lingkungan dan suhu ruangan. Serta laju perubahan suhu pada wadah termometer berkaitan dengan suhu ruangan dan suhu pada wadah termometer. serta raksa didalamnya memiliki kaitan dengan suhu air raksa.

Selanjutnya akan diperkirakan persamaan yang menunjukkan tinggi air raksa pada termometer. Dengan asumsi tinggi raksa memiliki kaitan dengan suhu wadah termometer beserta suhu raksa itu sendiri. Oleh karena itu, A_g sebanding dengan T_g^2 , V_g sebanding dengan T_g^3 , dan V_{Hg} sebanding dengan T_{Hg}^3 . Sehingga diperoleh model berikut.

$$A_g = c_1 T_g^2, V_g = c_2 T_g^3, V_{Hg} = c_3 T_{Hg}^3, h = \frac{V_{Hg} - V_g}{A_g} \quad (10)$$

Dengan c_1 sebagai konstanta satuan muai penampang termometer terhadap suhu, dan c_2 serta c_3 sebagai konstanta satuan muai volume terhadap suhu. Baik $c_1, c_2,$ maupun c_3 bernilai positif.

4. Hasil dan Pembahasan

Model laju perubahan suhu pada persamaan (9) dan tinggi raksa pada persamaan (10) dapat dibentuk menjadi model ruang keadaan. Dengan u dan T_a sebagai variabel input, serta h dan T_c merupakan variabel output. Namun, perlu diketahui letak titik kesetimbangan untuk tinggi air raksa beserta suhu ruangan agar dapat ditentukan pada di suhu berapakah ruangan dapat digunakan dengan nyaman sebagaimana mestinya.

Letak titik equilibrium dapat diketahui dengan mempertimbangkan salah satu teori tentang kesetimbangan, yaitu terdapat nilai input u khususnya bernilai nol. Yang berarti dengan asumsi tanpa gangguan dari suhu lingkungan serta kontrol pada katup sedemikian sehingga $f(x,u) = 0$. Dengan permisalan tersebut, diperoleh titik equilibrium suhu ruangan T_c , suhu wadah termometer T_g , dan suhu air raksa T_{Hg} bernilai nol. Dengan kata lain, tujuan dari desain pengendalian suhu ruangan ini adalah dengan mengembalikan suhu ruangan kembali ke titik kesetimbangan suhu ruangan, yaitu nol. Dari hasil linearisasi disekitar titik equilibrium serta penyatuan hasil kali variabel bebas diperoleh model umum ruang keadaan berikut

$$\frac{dT_c}{dt} = \alpha_1(T_a - T_c) + \beta_1 u, \quad (11)$$

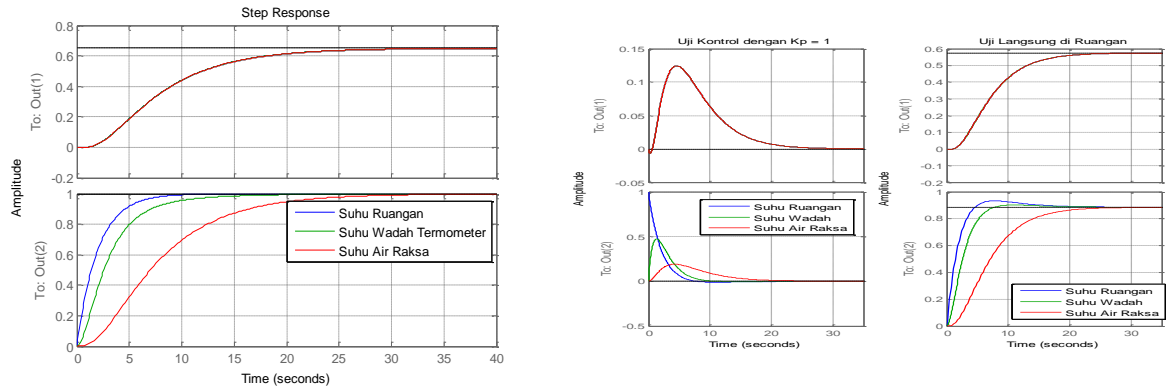
$$\frac{dT_g}{dt} = \alpha_2(T_c - T_g) + \alpha_3(T_{Hg} - T_g),$$

$$\frac{dT_{Hg}}{dt} = \alpha_4(T_g - T_{Hg})$$

$$h = \gamma_1 T_{Hg} - \gamma_2 T_g \quad (12)$$

Dengan nilai $\beta_1 = 0.1, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.1, \alpha_4 = 0.2, \gamma_1 = 0.7, \gamma_2 = 0.05$.

Pertama-tama, disimulasikan respon step yang terjadi untuk melihat apa yang akan terjadi bila suhu ruangan belum dikendalikan. Dengan suhu lingkungan T_a merupakan fungsi unit step. diperoleh gambaran sebagai berikut.



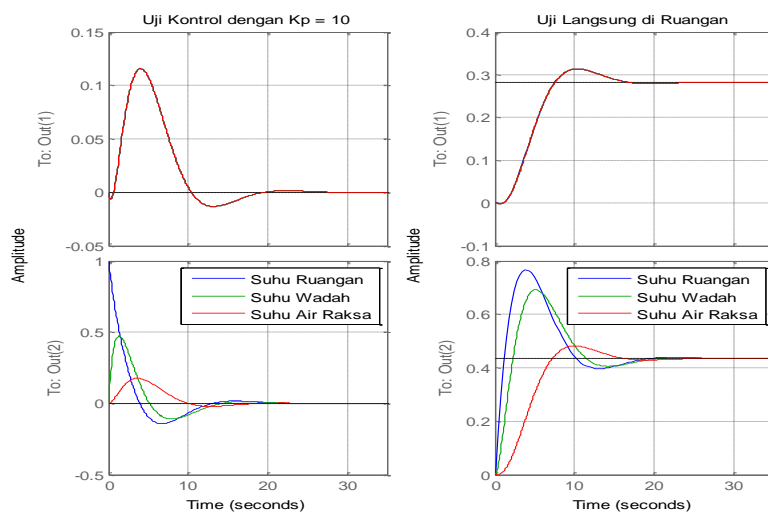
Gambar 2. Respon tanpa kontrol

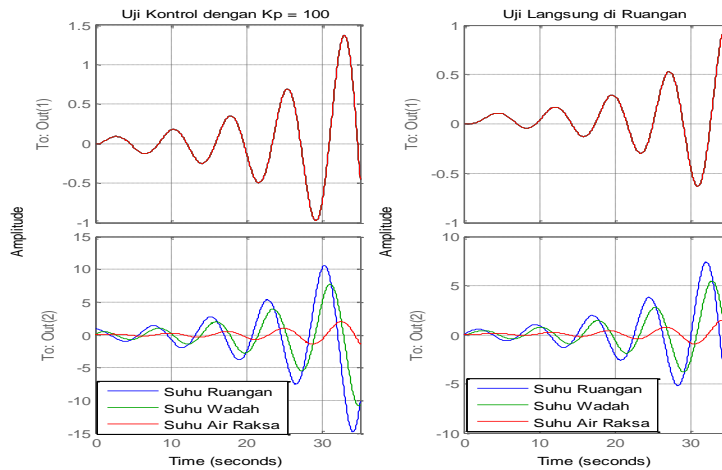
Gambar menunjukkan bahwa suhu akan bergerak menuju titik bernilai satu. Hal ini berarti bahwa ruangan akan menjadi panas bila tidak dikontrol. Oleh karena itu, akan dicoba beberapa alternatif kontrol pada katup udara agar suhu ruangan kembali lagi menuju titik kesetimbangan.

Selanjutnya untuk dicoba kontrol dengan asumsi suhu ruangan akan sebanding dengan tinggi raksa pada termometer. Sehingga didapat alternatif kontrol u sebagai berikut.

$$u = -K_p h \quad (13)$$

Dengan K_p merupakan nilai konstanta positif. Akan dicoba beberapa nilai K_p bernilai 1, 10, dan 100. Dari alternatif kontrol tersebut didapatkan gambaran sebagai berikut.





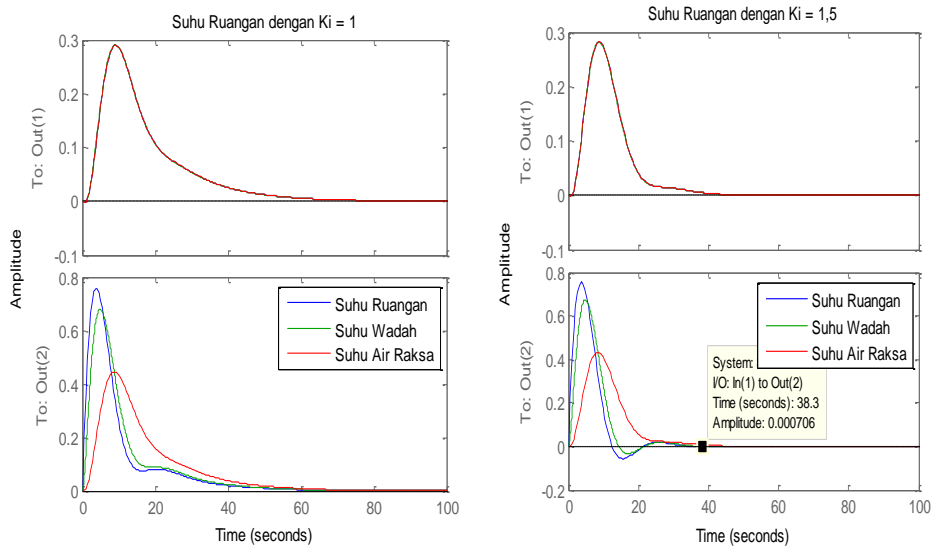
Gambar 3. Skema simulasi kontrol suhu ruangan dengan alternatif kontrol pertama.

Kurva atas merupakan kurva tinggi raksa, dan kurva bawah merupakan kurva suhu ruangan, suhu wadah thermometer, beserta suhu air raksa. Dari gambar berikut dapat dilihat bahwa dengan nilai $K_p = 1$ dan $K_p = 10$, terlihat bahwa pada uji kontrol, waktu yang dibutuhkan cukup lama untuk mencapai equilibrium, hal ini dikarenakan matriks dinamik dari alternatif kontrol dengan nilai konstanta K_p diatas bernilai real negatif bernilai kecil. Namun, jika dicoba langsung di ruangan yang memiliki suhu lingkungan sebagai gangguan, suhu ruangan masih belum dapat kembali ke titik kesetimbangan sehingga ruangan masih terasa panas dan belum nyaman sesuai yang diinginkan. Namun lain halnya dengan suhu ruangan dengan menggunakan alternatif kontrol pertama dengan nilai $K_p = 100$. Nilai eigen pada matriks dinamik memiliki nilai real negatif dan 2 bilangan kompleks dengan bagian nilai real positif. Sehingga bila disimulasikan, maka suhu ruangan yang semula baik-baik saja menjadi kacau seperti pada gambar. Dari gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa alternatif kontrol pertama belum cocok untuk digunakan pada ruangan agar ruangan dapat digunakan dengan nyaman.

Selanjutnya akan digunakan alternatif kontrol lainnya dengan memanfaatkan fungsi integral dari tinggi air raksa. Alternatif kontrol kedua ini menyisipkan alternatif kontrol pada persamaan (12) dan (13) dengan fungsi integral dari tinggi air raksa sehingga diperoleh alternatif kontrol berikut.

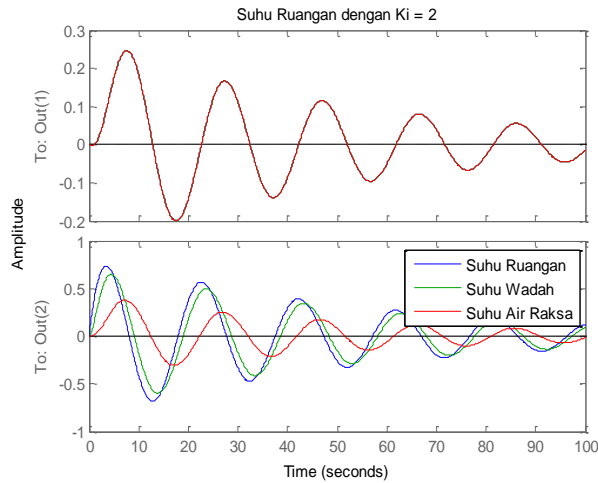
$$u = -K_p h - K_i z \quad (14)$$

Dengan $\frac{dz}{dt} = h$ atau z merupakan integral dari tinggi air raksa terhadap waktu. Serta K_i merupakan konstanta positif. Selanjutnya akan dicoba K_i dengan nilai yang berbeda-beda. Dengan nilai $K_p = 10$ diperoleh dari alternatif kontrol sebelumnya, $K_i = 1$, $K_i = 1,5$, $K_i = 2$. Didapat grafik suhu ruangan antara lain sebagai berikut.



Gambar 4. Skema suhu ruangan dengan $K_i = 1$, dan $K_i = 1,5$.

Dari gambar diatas, waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kesetimbangan memang cukup lama, namun tidak seperti sebelumnya. Suhu ruangan dapat kembali menuju titik kesetimbangan dengan nilai $K_i = 1$ membutuhkan waktu 80 detik, dan $K_i = 1,5$ membutuhkan waktu 35 detik. Adapun respon yang terjadi dengan nilai $K_i = 2$ adalah sebagai berikut.



Gambar 4. Skema suhu ruangan dengan nilai $K_i = 2$

Dapat dilihat bahwa dalam jangka waktu 100 detik, suhu ruangan belum kembali menuju kesetimbangan. Sehingga dapat disimpulkan model pengendalian terbaik yaitu alternatif kontrol kedua dengan pengaturan pada katup u berbentuk.

$$u = -10h - 1,5z \tag{15}$$

Dengan pengaturan pada katup udara diatas, suhu ruangan dapat kembali menuju titik kesetimbangan dalam waktu 35 detik.

5. KESIMPULAN

Adapun simpulan yang didapat dari paper ini adalah.

1. Sistem yang bekerja pada pengendalian suhu ruangan merupakan sistem yang terkontrol dan terobservasi dengan baik.
2. Model kontrol terbaik pada katup udara yaitu dengan persamaan $u = -10h - 1,5z$, dengan h sebagai tinggi air raksa dan z merupakan fungsi integral dari fungsi raksa terhadap waktu .
3. Waktu yang diperlukan untuk mencapai titik kesetimbangan adalah 35 detik.

KEPUSTAKAAN

- [1] Fishwick, P.A. 2007. *Handbook of Dynamic System Modeling*. Chapman & Hall/ CRC. New York
- [2] Meyers, R.A. 2011. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Inc., New York
- [3] Aoki, M. 2013. *State Space Modeling of Time Series*. Springer-Verlag, Inc., New York.
- [4] Gopal, M. 1993. *Modern Control Systems Theory*. New Age International, New Delhi.
- [5] Lagarrigue, F.L. and Loria, A. 2005. *Advanced Topics in Control Systems Theory*. Springer-Verlag Paris Inc., Paris.
- [6] Murdock, J.A. 1999. *Perturbations: Theory and Methods*. Siam, New York.