ISBN No. 978-602-98559-3-7

PENENTUAN RISIKO INVESTASI V@R DAN CV@R DENGAN MOMEN ORDE TINGGI

Marianik[1] **dan Khreshna Syuhada**[2]
Program Studi Magister Matematika - Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10 Bandung 40132 Indonesia
[1]marianik@s.itb.ac.id, [2]khreshna@math.itb.ac.id

Abstrak

Investasi merupakan kegiatan penanaman modal yang diharapkan dapat memberikan keuntungan bagi pihak yang terlibat. Investasi dalam bidang produksi dan jasa secara tidak langsung dapat meningkatkan perekonomian Indonesia. Investasi erat kaitannya dengan risiko. Risiko yang tidak dikelola dengan baik dapat memberikan dampak negatif (kerugian). Untuk menghitung risiko diperlukan suatu ukuran. Dua ukuran risiko kuantitatif yang digunakan adalah Value-at-Risk (V@R) dan Conditional-V@R (CV@R). V@R dikenal sebagai batas risiko maksimum yang dapat ditanggung oleh pelaku risiko, sedangkan CV@R menyatakan mean dari nilai risiko yang lebih dari V@R. Penentuan nilai V@R-CV@R dapat dihitung dengan menggunakan basis kuantil. Ekspansi Cornish-Fisher (CF) dan Transformasi Johnson SU (JSU) yang melibatkan momen orde tinggi digunakan untuk menentukan kuantil distribusi risiko tersebut yang berujung pada penentuan nilai V@R-CV@R. Ukuran risiko yang optimal ditentukan melalui nilai peluang cakupannya, semakin dekat nilai peluang cakupan dengan tingkat kepercayaan maka semakin akurat ukuran risiko tersebut. Nilai peluang cakupan dipengaruhi oleh metode penaksiran parameternya. Metode moment matching digunakan untuk menaksir parameter CF-V@R-CV@R, sedangkan penaksiran parameter JSU-V@R-CV@R menggunakan metode LM-KK.

Kata kunci: *ekspansi Cornish-Fisher, momen orde tinggi, peluang cakupan, transformasi Johnson SU, V@R-CV@R.*

1. PENDAHULUAN

Investasi adalah suatu tindakan penanaman modal (dapat berupa uang) pada suatu usaha atau kegiatan yang diharapkan dapat memberikan keuntungan bagi pelakunya (KBBI, 2017). Investasi menyumbang peranan yang cukup penting dalam kemajuan ekonomi Indonesia. Misalkan saja kegiatan penanaman modal pada pembangunan jalan dan pengadaan transportasi umum. Dalam berinvestasi ada tiga kemungkinan hasil yang diperoleh yaitu untung, rugi dan diantara keduanya. Untuk mengetahui hasil tersebut dibutuhkan suatu ukuran. Elton dan Gruber (1995) mendefinisikan imbal hasil atau return sebagai tingkat pengembalian dari suatu investasi pada suatu periode tertentu. Return positif menggambarkan bahwa nilai aset investasi naik (untung), nol menunjukkan tidak ada perubahan pada nilai aset investasi, sedangkan negatif menunjukkan bahwa nilai aset investasi turun (rugi) pada suatu periode. Golongan *risk taker* percaya bahwa semakin besar return (positif) yang diinginkan maka semakin besar pula risiko yang mungkin terjadi.

Dalam berinvestasi, kerugian dikenal sebagai risiko. Risiko memiliki sifat yang tidak pasti. Ketidakpastian ini menggiring kepada analisa lebih lanjut yang melibatkan anilisis stokastik. Risiko dalam suatu periode tertentu dapat membentuk sebuah barisan. Barisan risiko ini yang nantinya akan dimodelkan sehingga dapat digunakan untuk memprediksi risiko yang akan datang. Selain itu, keberadaan risiko juga perlu diminimalisir, sehingga risiko perlu dikuantifikasi. McNeil dkk. (2005) dalam buku manajemen risiko kuantitatif-nya, mendefinisikan suatu ukuran risiko kuantitatif yang merepresentasikan risiko maksimum yang masih dapat ditolerir oleh pelaku risiko pada tingkat kepercayaan tertentu yang disebut value-at-risk (V@R). Sebagai alternatif, untuk mewakili kemungkinan prediksi nilai risiko yang jatuh pada nilai meleibihi V@R akan digunakan conditional-V@R (CV@R). Nilai CV@R dapat dipandang sebagai nilai rata-rata fungsi realitas risiko (luas rata-rata daerah dibawah fungsi) yang diwakili oleh perkalian nilai realisasi risiko dengan fungsi peluangnya. Dalam perkembangannya, nilai V@R-CV@R dapat ditentukan dengan basis prediksi berdasarkan kuantil (Christoffersen dan Gonçalves, 2004).

Kuantil ke-k distribusi didefinisikan sebagai nilai ke-$100\times k$ dari statistik terurut peubah acaknya. Nilai kuantil ke-k juga dapat dipandang sebagai nilai invers fungsi distribusi saat k, sehingga penentuan fungsi distribusi yang cocok sangatlah penting. Teknik pendekatan yang digunakan untuk menentukan fungsi distribusi tersebut adalah ekspansi Cornish-Fisher (melalui ekspansi Edgeworth) dan transformasi Johnson SU yang melibatkan momen orde tinggi. Dua teknik ini memanfaatkan distribusi normal dalam penentuan fungsi distribusinya, sehingga memberikan kemudahan dalam mencari kuantil. Teknik tersebut pernah dilakukan Alexander, dkk. (2013) untuk menentukan V@R berbasis kuantil untuk 5,10,20 periode kedepan pada model risiko GJR-GARCH(1,1). Dengan memenafaatkan hubungan anatara V@R dan CV@R maka CV@R berbasis kuantil dengan momen orde tinggi juga dapat ditentukan. Selain penentuan nilai V@R-CV@R, pengukuran keakuratan dari kedua ukuran tersebut juga diperlukan. Salah satu ukuran yang dapat digunakan adalah nilai peluang cakupan.

Kabaila dan Syuhada (2010) memanfatkan ekspansi Taylor untuk menentukan nilai peluang cakupan. Ekspansi Taylor dikenal dapat memberikan kemudahan untuk mendekati nilai fungsi pada suatu nilai dengan fungsi polinom. Tentunya pendekatan nilai tersebut melibatkan nilai 'sisa'. Dengan memanfaatkan konsep yang sama, ekpansi Taylor stokastik orde dua akan digunakan untuk mendekati fungsi distribusi dari suatu pebuah acak dengan parameter fungsi distribusi tersebut sebagai variabel bebas. Orde pertama dan kedua ekspansi Taylor stokastik ini berturut-turut menyatakan Bias dan MSE parameter. Suku sisa pada pada ekspansi Taylor tersebut dianggap tidak memberikan pengaruh yang signifikan dengan orde ketelitian sebesar $O(n^{-1})$.

2. RISIKO STOKASTIK DAN UKURAN RISIKO

Risiko yang terjadi secara terus menerus dapat membentuk suatu barisan. Sifat ketidakpastian nilai risiko menggiring kepada analisa risiko secara stokastik. Oleh karena itu, risiko dalam periode waktu tertentu dapat membetuk suatu proses stokastik, yang berujung pada fakta bahwa risiko dapat diprediksi. Dalam penenerapannya, risiko dapat dinyatakan sebagai fungsi dari volatilitas. Nilai volatilitas menyatakan besarnya perubahan risiko relatif terhadap 'informasi' sebelumnya pada suatu periode tertentu. Semakin besar nilai volatilitas maka semakin besar pula risiko yang mungkin ditanggung. Misalkan risiko setiap waktu dipetakan ke suatu peubah acak, maka kita akan mendapatkan suatu barisan peubah acak (proses stokastik). Misalkan $\{R_t\}_{t\geq 1}$ menyatakan barisan risiko acak tersebut. Model risiko tersebut memiliki formula $R_t = f(\sigma_t, \varepsilon_t) = \sigma_t \varepsilon_t$ dengan ε_t merupakan proses stokastik saling bebas dan identik dengan mean 0 dan variansi 1.

Volatilitas memiliki sifat yang tidak terobservasi secara langsung, sehingga tidak ada kesepakatan yang pasti untuk menentukan nilainya. Dalam melakukan prediksi risiko diperlukan prediksi nilai volatilitas. Salah satu formula yang dapat digunakan untuk menentukan nilai prediksi volatilitas satu langkah adalah volatilitas heteroskedastik yang memiliki formula sebagai berikut.

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2,$$

dengan parameter α_0 α_1 dapat ditentukan menggunakan metode gaussian-LM. Formula risiko dan bentuk volatilitas heteroskedastik di atas akan digunakan untuk menentukan bentuk umum ukuran risiko. Misalkan terdapat sebanyak n observasi risiko. Bentuk umum prediksi satu langkah $(n+1)$ ukuran risiko momen orde tinggi V@R-CV@R berbasis kuantil dapat dinyatakan dalam formula berikut ini.

$$\mathrm{V@R}_{n+1;\hat{\theta}}^{\alpha} = \sigma_{n+1} \cdot \mathrm{H}_{\varepsilon;\hat{\mathrm{m}}_{\varepsilon}^{(i)}}^{-1}(1-\alpha) \tag{1}$$

$$\mathrm{CV@R}_{n+1;\hat{\theta}}^{\alpha} = \sigma_{n+1} \cdot g_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{\mathrm{m}}_{\varepsilon}^{(i)}) \tag{2}$$

dengan $\mathrm{H}^{-1}_{\varepsilon;\hat{\mathrm{m}}_\varepsilon^{(i)}}(1-\alpha)$ merupakan nilai kuantil ke-$(1-\alpha)$ dari distribusi inovasi (ε_t); $g_\varepsilon^\alpha(\hat{\mathrm{m}}_\varepsilon^{(i)})$ menyatakan rata-rata nilai inovasi yang melebihi $\mathrm{H}^{-1}_{\varepsilon;\hat{\mathrm{m}}_\varepsilon^{(i)}}(1-\alpha)$ relatif terhadap fungsi distribusinya.

Dalam penerapannya, bentuk $\mathrm{H}^{-1}_{\varepsilon;\hat{\mathrm{m}}_\varepsilon^{(i)}}(1-\alpha)$ dan $g_\varepsilon^\alpha(\hat{\mathrm{m}}_\varepsilon^{(i)})$ dapat ditentukan melalui dua pendekatan yaitu melalui ekspansi Cornish-Fisher dan transformasi Johnson SU. Berikut ini merupakan beberapa keunggulan dari kedua pendekatan ini: Pertama, penerapan momen orde tinggi dapat memberikan pendekatan kecocokan distribusi populasi lebih baik daripada distribusi normal. Kedua, keistimewaan bentuk kuantil dari distribusi normal baku memberikan kemudahan untuk menentukan kuantil dari ekspansi Cornish-Fisher dan transformasi Johnson SU. Dari bentuk umum V@R-CV@R (1) dan (2) didapatkan prediksi momen orde tinggi V@R-CV@R satu langkah sebagai berikut.

- Prediksi satu langkah Cornish Fisher V@R-CV@R

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}^{\mathrm{CF}}_{n+1,\alpha;\hat{\theta}} &= \sigma_{n+1}\cdot\left[q_\alpha+\frac{\hat{\beta}_3}{6}((q_\alpha)^2-1)+\frac{\hat{\beta}_4}{24}q_\alpha((q_\alpha)^2-3)-\frac{\hat{\beta}_3^{\,2}}{36}q_\alpha(2(q_\alpha)^2-5)\right]\\
\mathrm{CV@R}^{\mathrm{CF}}_{n+1,\alpha;\hat{\theta}} &= \sigma_{n+1}\cdot\frac{\phi\left(q_\alpha^{CF}\right)}{\alpha}\left[1+\frac{\hat{\beta}_3}{6}\left(q_\alpha^{CF}\right)^3+\frac{\hat{\beta}_4}{24}\left[(q_\alpha^{CF})^4-2(q_\alpha^{CF})^2-1\right]\right]\\
&\quad-\sigma_{n+1}\cdot\frac{\phi\left(q_\alpha^{CF}\right)}{\alpha}\left[\frac{\hat{\beta}_3^{\,2}}{72}\left[(q_\alpha^{CF})^6-9(q_\alpha^{CF})^4+9(q_\alpha^{CF})^2-3\right]\right]
\end{aligned}$$

  dengan q_α dan q_α^{CF} berturut-turut menyatakan kuantil ke-$(1-\alpha)$ dari distribusi normal baku dan ekspansi Cornish Fisher yang bersesuaian dengan nilai q_α.

- Prediksi satu langkah Johnson SU V@R-CV@R

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}^{\mathrm{JSU}}_{n+1,\alpha;\hat{\theta}} =&\sigma_{n+1}\cdot\left[\hat{\xi}+\hat{\lambda}\sinh\left(\frac{q_\alpha-\hat{\zeta}}{\hat{\delta}}\right)\right]\\
\mathrm{CV@R}^{\mathrm{JSU}}_{n+1,\alpha;\hat{\theta}} =&\sigma_{n+1}\left[q_\alpha^{JSU}\phi\left(\hat{\zeta}+\hat{\delta}\sinh^{-1}\left(\frac{q_\alpha^{JSU}-\hat{\xi}}{\hat{\lambda}}\right)\right)+1-\Phi\left(\hat{\zeta}+\hat{\delta}\sinh^{-1}\left(\frac{q_\alpha^{JSU}-\hat{\xi}}{\hat{\lambda}}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

  dengan q_α menyatakan kuantil ke-$(1-\alpha)$ distribusi normal baku;
  q_α^{JSU} menyatakab kuantil ke-$(1-\alpha)$ transformasi Johnson SU yang bersesuaian dengan q_α.

3. EKSPANSI TAYLOR STOKASTIK: PENENTUAN PELUANG CAKUPAN V@R-CV@R

Ekspansi Taylor biasanya digunakan untuk mendekati nilai fungsi pada suatu nilai dengan fungsi polinom. Fungsi polinom ini memberikan kemudahan dalam perhitungan nilai tersebut. Dengan mengadopsi ide tersebut, ekspansi Taylor akan digunakan untuk mencari nilai peluang cakupan dari momen orde tinggi V@R-CV@R. Peluang cakupan merupakan suatu nilai yang merepresentasikan besarnya peluang bahwa nilai prediksi risiko akan jatuh pada daerah yang lebih kecil dari nilai V@R-CV@R. Berdasarkan bentuk umum V@R-CV@R pada persamaan (1), peluang cakupan dari V@R untuk proses stokastik risiko $\{R_t\}$ dapat ditentukan melalui peluang cakupan dari barisan peubah acak inovasinya $(\{\varepsilon_t\})$. Berikut ini merupakan bentuk umum peluang cakupan dari momen orde tinggi V@R.

$$\mathrm{P}_\theta\left(\varepsilon_{t+1}\leq q^\alpha_{t+1;\hat{\theta}}\right)=\mathrm{E}_\theta\left[\mathrm{H}_\theta\left(q^\alpha_{t+1;\hat{\theta}}\right)\right]. \tag{3}$$

Sedangkan, bentuk umum peluang cakupan CV@R menggunakan teknik yang pernah dilakukan oleh Rohmawati dan Syuhada (2015) yang memandang CV@R sebagai nilai kuantil ke-U dari distribusi inovasinya dengan U merupakan peubah acak berdistribusi uniform (0,1) yang lebih besar dari $(1-\alpha)$. Oleh karena itu, bentuk umum peluang cakupan CV@R sama dengan V@R.

Ekspansi Taylor digunakan untuk mendekati nilai harapan $\mathrm{H}_\theta\left(q^{\alpha}_{t+1;\hat{\theta}}\right)$ dengan $\mathrm{H}_\theta\left(q^{\alpha}_{t+1;\theta}\right)$. Berdasarkan Bartle (2011), turunan ke-n dari H_θ dijamin ada di $\hat{\theta}$ dikarenakan turunan ke-$(n-1)$ dari H_θ selalu ada disepanjang interval I. Hal ini dapat terjadi karena H_θ merupakan fungsi distribusi dari peubah acak kontinu yang nilai turunan pertamanya (fungsi peluang) terjamin selalu ada di sepanjang interval I.

Misalkan $\hat{\Theta}$ menyatakan peubah acak dari estimasi parameter. Misalkan $G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha) = H_\theta(q^{\alpha}_{n+1;\hat{\Theta}})$. Ekspansi Taylor digunakan untuk menentukan fungsi $G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha)$ sebagai berikut

$$G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha) = G_{\hat{\Theta}}(\theta;\alpha) + \frac{1}{1!}\frac{\partial G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha)}{\partial \hat{\theta}_i}\bigg|_{\hat{\Theta}=\theta}(\hat{\theta}_i-\theta_i) + \frac{1}{2!}\frac{\partial G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha)}{\partial \hat{\theta}_i \partial \hat{\theta}_j}\bigg|_{\hat{\Theta}=\theta}(\hat{\theta}_i-\theta_i)(\hat{\theta}_j-\theta_j) + \cdots \tag{4}$$

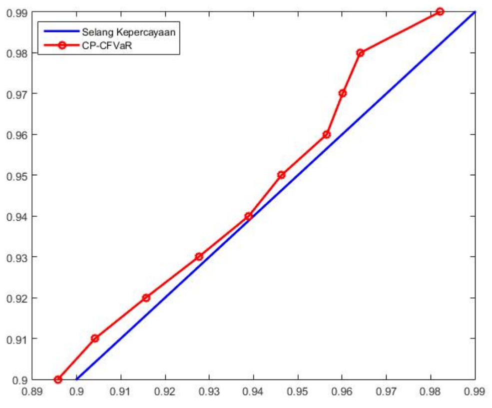
dengan $\hat{\theta}_i$ dan θ_i komponen ke-i dari vektor parameter $\hat{\theta}$ dan θ, sehingga dari persamaan (3) dan menerapkanny pada ekspansi Taylor pada persamaan (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\theta\left(\varepsilon_{n+1} \le q^{\alpha}_{t+1;\hat{\theta}}\right) &= \mathrm{E}_\theta\left[G_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta};\alpha)\right] \\ &= 1-\alpha + c_\alpha(\theta)n^{-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

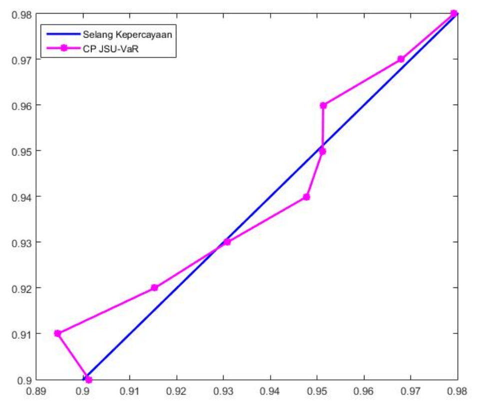
Dari persamaan (5) di atas terlihat bahwa semakin dekat nilai peluang cakupan dengan selang kepercayaan $(1-\alpha)$, maka semakin akurat ukuran risiko V@R-CV@R.

Bentuk peluang cakupan diatas memberikan implikasi bahwa penentuan peluang cakupan sangat bergantung terhadap metode penaksiran parameter yang digunakan. Pada metode CF-V@R digunakan metode penaksiran *moment matching* yaitu dengan mendekati parameter β_3 dengan momen ke-3 dari peubah acak inovasi dan parameter β_4 dengan momen ke-4 dari peubah acak inovasi. Sedangkan metode penaksiran yang digunakan untuk menaksir keempat parameter transformasi Johnson SU adalah gabungan dari metode likelihood maksimum dan kuadrat terkecil (LM-KK). Metode LM (likelihood maksimum) digunakan untuk menaksir parameter ζ dan δ, sedangkan metode KK (kuadrat terkecil) untuk menaksir parameter ξ dan λ. Dengan menggunakan kedua metode penaksiran tersebut didapatkan bentuk eksplisit taksiran parameter.

Penentukan seberapa jauh nilai peluang cakupan dengan selang kepercayaan dapat dilihat dari visualisasinya. Berikut ini merupakan grafik peluang cakupan V@R dengan ekspansi Cornish Fisher dan transformasi Johnson SU dengan data bangkitan sebanyak 500 data.



Gambar 1: Peluang Cakupan V@R (dengan CF)



Gambar 2: Peluang Cakupan V@R (dengan JSU)

ISBN No. 978-602-98559-3-7

4. ANALISIS V@R-CV@R: DATA ASET SAHAM

Pada bab ini dilakukan penentuan prediksi nilai satu langkah V@R-CV@R dengan momen orde tinggi pada suatu aset saham. Data sampel yang digunakan adalah data aset saham PT Jasa Marga periode 1 Oktober 2013 sampai dengan 10 November 2017. Data yang digunakan adalah return majemuk. Return majemuk memiliki kekhasan yaitu jumlahan return selama periode tertentu akan sama dengan return pada akhir periode relatif terhadap return awal periode. Hal tersebut memberikan kemudahan dalam menganalisa return yang akan didapat pada akhir investasi.

Bentuk umum ukuran risiko V@R-CV@R pada persamaan (1) menunjukkan ukuran risiko di sebelah kanan, sehingga dalam pengolahannya return yang dipandang sebagai risiko akan ditransformasi terlebih dahulu. Transformasi yang dilakukan adalah dengan mencerminkan data return ke sumbu-x (negatif return), sehingga didapatkan data risiko sebelah kanan (dari sumbu-y). Berikut ini adalah hasil numerik nilai V@R-CV@R dengan ekspansi Cornish-Fisher dan transformasi Johnson SU dengan berbagai selang kepercayaan.

Table 1: Prediksi V@R dan CV@R Return Majemuk Saham PT Jasa Marga

$1-\alpha$	CF-V@R	JSU-V@R	CF-CV@R	JSU-CV@R
0.90	0.0246	0.02634	0.03905	0.0406
PC 90%	89.62	90.25	94.52	94.86
0.95	0.0352	0.03708	0.0576	0.0534
PC 95%	95.12	94.91	95.81	96.34
0.99	0.0644	0.0655	0.1285	0.0808
PC 99%	98.25	99.51	98.99	99.99

Dari Tabel 1, didapatkan bahwa nilai V@R-CV@R kedua metode mememberikan nilai yang hampir mirip dengan peluang cakupan V@R lebih dekat dibandingkan dengan nilai cakupan CV@R.

Berikut ini ilustrasi dari nilai presiksi V@R-CV@R pada suatu investasi. Misalkan investor memiliki nilai investasi pada tanggal 1 Oktober 2013 adalah satu juta rupiah. Risiko maksimum yang dapat ditanggung selama menginvestasikan sampai 10 November 2017 (V@R) dengan tingkat kepercayaan 95% dengan ekspansi Cornish-Fisher adalah sebesar 0.0352.

5. SIMPULAN

Pada artikel ini telah diformulasikan bentuk umum ukuran risiko V@R-CV@R berbasis kuantil yang direpresentasikan dengan pendekatan momen orde tinggi yaitu CF V@R-CV@R dan JSU V@R-CV@R. Dengan fakta bahwa risiko merupakan fungsi dari volatilitas dan inovasinya, maka penentuan kedua ukuran risiko tersebut cukup mengacu pada pendekatan distribusi inovasinya. Penentuan ukuran risiko yang optimal dilihat dari kedekatan peluang cakupan dan selang kepercayaan yang digunakan. Dengan memodifikasi teknik yang dilakukan oleh Kabaila dan Syuhada (2010), peluang cakupan dari kedua ukuran risiko tersebut cukup dilihat dari ekspansi distribusi inovasinya. Dari Gambar 1 dan Gambar 2 terlihat bahwa V@R dengan ekspansi Cornish Fisher memberikan nilai peluang cakupan yang cukup dekat pada selang kepercayaan 90%-99%.

KEPUSTAKAAN

[1] Elton, E.J. dan Gruber, M.J. (1995): *Modern Portfolio : Theory and Investment Analysis 5th ed.* John Wiley & Sons.

[2] McNeil, A.J., Frey, R. dan Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

[3] Alexander, C., Lazar, E., dan Stanescu, S. (2013) : Forecasting VaR Using Analytic Higher Moments for GARCH Processes, *International Review of Financial Analysis*, 30, 36-45.

[4] Kabaila, P. dan Syuhada, K. (2010). The Asymptotic Efficiency of Improved Prediction Intervals, *Statistics and Probability Letters*,80,1348-133

[5] Rohmawati, A.A. dan Syuhada, K. (2015). Value-at-Risk and Expected Shortfall Relationship, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 53, No.5

[6] Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. (2011): *Introduction to Real Analysis 4th ed.* John Wiley & Sons, Inc.