Keujudan dan ketunggalan Solusi dari iterasi picard

Agus Sutrisno

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

Abstrak. Sebuah Model berguna bila persamaan diferensial yang dihasilkan dapat diselesaikan secara eksplisit, atau paling sedikit jika kita dapat menemukan teknik yang beraneka ragam untuk menyelesaikan suatu persamaan Diferensial, akan sangat bermanfaat mengetahui apakah persamaan diferensial itu mempunyai penyelesaian atau tidak yaitu apakah penyelesaian persamaan Diferensial itu ujud.

Keyword : Keujudan dan Ketunggalan

Pendahuluan

Persamaan differensial linier umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan cara analitik seperti pemakaian Transformasi Laplace, tetapi pada bentuk yang kompleks persamaan differensial linier ini menjadi sulit diselesaikan. Pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya pada differensial non-linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan.

Ada beberapa metode pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, antara lain: metode Euler, metode pendekatan dengan deret Taylor, metode runge-kutta dan metode-metode prediktor-korektor seperti metode Adam Moulton. Hanya saja metode-metode pendekatan ini menyebabkan penyelesaian yang dihasilkan bukanlah penyelesaian umum dari persamaan differensial, tetapi penyelesaian khusus dengan nilai awal dan nilai batas yang ditentukan.

Tinjauan Pustaka

Theorema .1. Keujudan
Jika

$f(x,y)$ kontinu untuk semua titik (x,y) di dalam persegi panjang

$R: |x - x_0| < \propto,\ |y - y_0| < b$ dan terbatas di $R,\ f|f(x,y)| \leq K,\ untuk\ semua\ (x,y) \in R$ maka masalah nilai Awal di atas mempunyai paling sedikit satu solusi $y(x)$. Solusi ini terdefinisi untuk semua x pada interval $|x - x_0| < \propto$.

Theorema .2. Ketunggalan
Jika

$f(x,y)\ dan\ {}^{\partial f}/_{\partial y}$ kontinu untuk semua (x,y) di dalam persegi panjang

$R: |x - x_0| < \propto,\ |y - y_0| < b$ dan terbatas di $R,\ f|f(x,y)| \leq K,\ untuk\ semua\ (x,y) \in R$ maka masalah nilai Awal di atas mempunyai paling sedikit satu solusi $y(x)$. Solusi ini terdefinisi untuk semua x pada interval $|x - x_0| < \propto$.

Contoh:

Jika koefisien $a(x)\ dan\ b(x)$ dari persamaan diferensial

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (1)$$

kontinu disuatu selang buka I, buktikan bahwa (5) mempunyai penyelesaian tunggal melalui sebarang titik $(x - x_0)$ dengan $x_0 \epsilon I$.

Penyelesaian

Pilih bilangan A sedemikian sehingga $(x - x_0) \leq$A terletak dalam selang I, maka $(F(x,y) = b(x) - a(x)y)$ dan $(F_y(x,y) = -a(x))$ kontinu di I. Menurut teorema 1, Persamaan (1) mempunyai penyelesaian tunggal dengan syarat awal

$y(x_0) = y_0$. Dengan kata lain melalui titik (x_0, y_0) untuk sebarang bilangan real y_0.

Dapat dibuktikan penyelesaiaannya ujud disebuah seluruh selang yang meliputi x_0 dimana koefisien-koefisien $a(x)$ dan $b(x)$ kontinu.

Iterasi Picard

Teorema (1) dan (2), memberikan syarat-syarat yang harus dipenuhi agar suatu persamaan diferensial mempunyai penyelesaian tunggal. Dari kepastian adanya penyelesaian tunggal ini, dapat dikembangkan metode untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial ini dengan pasti maupun secara hampiran.

Iterasi Picard Untuk Masalah Nilai Awal

Metode Iterasi Picard digunakan untuk penyelesaian secara hampiran persamaan diferensial dengan Nilai Awal.

y'$= f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ (2)

Dua ide yang mendasari metode ini. Pertama Integrasikan ke 2 sisi (2) diperoleh

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt \qquad (3)$$

Lalu ide kedua dari metode ini adalah menyelesaikan (3) dengan iterasi. Langkah pertama subtitusikan $y(t) = y_0$ pada (3) dan hitung hampiran $y_1(x)$ dari solusi

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_0(t)]\, dt \qquad (4)$$

Langkah ke dua subtitusikan fungsi $y_1(x)$ ke (4), dengan langkah yang sama

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\, dt$$

Hingga langkah ke n, diperoleh fungsi hampiran:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt \qquad (5)$$

Langkah ini mendapatkan barisan hampiran

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x), \ldots \qquad (6)$$

Theorema (Konvergensi Iterasi Picard)

Persamaan (5) dengan solusi hampiran (6) konvergen ke $y(x)$.

Contoh:

Selesaikan Masalah nilai awal berikut dengan metode iterasi Picard

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0 \qquad (7)$$

Penyelesaian

$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ f(x,y) = 1 + y^2,$ selanjutnya

$$y_n(x) = \int_0^x f[1 + y_{n-1}^2(t)]\, dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2\, dt$$

dimana $y_0 = 0$ diperoleh

$$y_1(x) = x + \int_0^x 0\, dt = x$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t^2\, dt = x + \frac{1}{3}x^3$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{3}\right)^2 dt = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

$$\vdots$$

$$y(x) = \tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{1}{63}x^7 + \cdots, \quad \left(-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad (8)$$

Terlihat (8) konvergen untuk $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Kesimpulan

Teorema (1) dan (2) memberikan syarat-syarat yang harus dipenuhi agar suatu persamaan difernsial mempunyai penyelesaian dan tunggal. Ketunggalan penyelesaian masalah nilai awal sangat penting. Jika suatu masalah nilai awal diketahui penyelesaian tunggalnya, selanjutnya dapat digunakan metode apapun (termasuk) menerka untuk mendapatkan penyelesaian.

DAFRAT PUSTAKA

Ayres, Frank. J.C. Ault (1999). *Persamaan Diferensial*, Jakarta, Erlangga,

Finizio dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Kusumah, Yahya S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Depdikbud.

Keryzig, Erwin, (1999). *Advanced Engineering Mathematics 8rd Edition*, New York: John Wiley & Sons

Purcell, Edwin J. & Dale Varberg, Alih bahasa I Nyoman Susila, & Bana Kartasasmita, Rawuh, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jakarta, Erlangga, 1994

Ross, S.,L.(1980).*Introduction To Ordinary Differential Equation 3rd Edition*, New York: John Wiley & Sons

Santosa, Widiarti dan Pamuntjak, R. J. (1994). *Persamaan Diferensial Biasa*.Jakarta: DIKTI, Departemen Pendidikan Dan Kebudayaan.