SOLUSI NUMERIK SISTEM PERSAMAAN NONLINIERDENGAN MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPY

Bukti Ginting

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas , Padang
Email: ginting_suka54@yahoo.com

Abstrak. Pada makalah ini, penulis akan mengkaji suatu cara untuk mendapatkan solusi sistem persamaan nonlinier dengan terlebih dahulu mendifinisikan suatu bentuk fungsi $G(\lambda, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda})) = 0$, untuk$\lambda \in [0,1]$ dikatakan fungsi homotopy yang memenuhi sifat kekontinuan dan differensiabel. Selanjutnya, dengan defferensiasi fungsi homotopy akan menampilkan suatu bentuk sistem persamaan differensial,$\mathrm{x}'(\lambda) = -[J(\mathrm{x}(\lambda))]^{-1}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}(0))$, $\lambda \in [0\,,1]$dengan syarat awal $\mathrm{x}(0)$dan $J(\mathrm{x}(\lambda))$ adalah matrik Jacobian nonsingular. Kemudian dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat diselesaikan sistem persamaan differensial sehingga solusi yang diperoleh merupakan solusi sistem persamaan nonlinier.

Kata kunci: Sistem nonlinier, Fungsi homotopy, Sistem persamaan differensisl, Matrik Jacobian, Rung- Kutta orde empat.

PENDAHULUAN

Proses untuk menentukan solusi suatu sistem persamaan nonlinier secara numerik sering digunakan metode Newton, metode Quasi-Newton dan metode Steepest Descent.

Pada makalah ini dikaji tentang konsep-konsep metode homotopy kontinu untuk mentransformasikan suatu sistem persamaan nonlinier kedalam bentuk sistem persamaan differensial. Secara umum konsep dasar yang diterapkan untuk menentukan solusi suatu sistem persamaan nonlinier secara numerik, dapat dikatakan merupakan konsep kontinuitas dan differensiabelitas suatu fungsi.Bentuk umum suatu sistem persamaan nonlinier dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \; . \; . \; . \; , x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \; . \; . \; . \; , x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, \; . \; . \; . \; , x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \; . \; . \; . \; , x_n) &= 0 \end{aligned}$$

untuk setiap fungsi f_i , i = 1, 2 , . . . , n dinyatakan sebagai suatu pemetaan vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$dari suaturuang $\Re^n$ ke $\Re$. Suatu sistem persamaan nonlinier dengan *n* persamaan dan nvariabel tidak diketahui direpresentasikan fungsi **F** oleh suatu pemetaan dari $\Re^n$ ke $\Re^n$ yaitu, $\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$ $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \; \dots \; , f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ dimana $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi koordinat **F** dan jika variabel$x_1, x_2, \dots, x_n$ dinyatakan sebagai vektor maka sistem persamaan nonlinier ditampilkan sebagai **F**(**x**) = 0.

Sebelum membicarakan metode penyelesaian suatu sistem persamaan nonlinier terlebih dahulu dinyatakan sifat-sifat kekontinuan dan differensiabel fungsi dari $\Re^n$ ke $\Re$ dan dari $\Re^n$ ke $\Re^n$. Misalkan, fungsi f didifinisikan pada himpunan $D \subset \Re^n$ dengan pemetaan dari $\Re^n$ ke$\Re$ sehingga limit fungsi f pada x_0 adalah $\boldsymbol{L}$yaitu$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = \boldsymbol{L}$, jika untuk setiap$\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ memenuhi$|\, f(\mathrm{x}) - \mathbf{L}\,| < \varepsilon$, untuk $\mathbf{x} \in D$ dan $0 < \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| < \delta$ dimana nilai δ ditentukan oleh nilai norm tetapi nilai limit yaitu $\boldsymbol{L}$tidak bergantung pada nilai norm. Andaikan bahwa nilai$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$

ada yaitu $f(x_0)$ maka dikatakan fungsi f kontinu pada $x_0 \in D$. Jika fungsi f

kontinu untuk setiap $x_0 \in D$ maka dikatakan fungsi f kontinu pada himpunan D sehingga fungsi f dari $\Re^n$ *ke* $\Re$ dikatakan kontinu pada $x_0 \in D$ dinotasikan oleh $f \in C(D)$. Selanjutnya untuk menyatakan fungsi-fungsi koordinat kontinu dari $\Re^n$ ke $\Re^n$ dilakukan dengan penerapan konsep yang sama seperti menyatakan fungsi-fungsi koordinat kontinu dari $\Re^n$ ke $\Re$. Misalkan **F** fungsidari $D \subset \Re^n$ ke $\Re^n$ dipresentasikanoleh, $\mathbf{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^t$ dengan limit fungsi **F** dari $\Re^n$ ke $\Re^n$ yaitu $\lim_{x \to x_0} \mathbf{F}(x) = \boldsymbol{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_n)^t$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$. Andaikan nilai $\lim_{x \to x_0} \mathbf{F}(x)$ ada yaitu $\mathbf{F}(x_0)$ maka fungsi **F** dikatakan kontinu pada $x_0 \in D$. Jika nilai $\lim_{x \to x_0} \mathbf{F}(x)$ ada untuk setiap $x_0 \in D$ maka dapat dikatakan bahwa fungsi **F** kontinu pada himpunan $D \subset \Re^n$ sehingga fungsi **F** kontinu dari $\Re^n$ ke $\Re^n$.

METODE PENELITIAN

Kajian dilakukan pada makalah ini, pertama sekali menetapkan suatu fungsi homotopy yang memenuhi konsep-konsep kontinuitas dan differensiabelitas. Fungsi homotopy mentransformasikan sistem persamaan nonlinier kedalam bentuk sistem persamaan differensial dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema (Homotopy Convergence)

Misalkan $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ defferensiabel kontinu untuk setiap $\mathbf{x} \in \Re^n$. Andaikan $J(\mathbf{x})$ matrik Jacobian nonsingular untuk semua $\mathbf{x} \in \Re^n$ dan ada suatu konstanta M dimana $\| J(\mathbf{x})^{-1} \| \leq M$ untuk semua $\mathbf{x} \in \Re^n$.

Maka untuk suatu $\mathbf{x}(0) \in \Re^n$ ada suatu fungsi tunggal $\mathbf{x}(\lambda)$ memenuhi $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = 0$, untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ dengan $\mathbf{x}(\lambda)$ differensiabel kontinu yaitu $\mathbf{x}'(\lambda) = -[J(\mathbf{x}(\lambda))]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$, untuk setiap $0 \leq \lambda \leq 1$. Selanjutnya solusi sistem persamaan differensial ditentukan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu sistem persamaan nonlinier dinyatakan dalam bentuk, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, dimana $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ adalah solusi tidak diketahui, diasumsikan sebagai parameter λ yaitu $0 \leq \lambda \leq 1$. Dengan asumsi tersebut ada dua problema yaitu; Pertama, $\mathbf{x}(0)$ dengan λ=0 memenuhi $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ adalah syarat awal berati solusi diketahui. Kedua $\mathbf{x}(1) \equiv \mathbf{x}^*$ dengan λ=1 adalah solusi tidak diketahui yang akan ditentukan sehingga memenuhi $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$.

Berdasarkan problema, maka didefinisikan suatu fungsi $\boldsymbol{G}$ yaitu, $\boldsymbol{G} : [0,1] \times \Re^n \to \Re^n$ dimana,

$$\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))]$$
$$= \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)\, \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

dan λ dikatakan solusi jika memenuhi persamaan $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}) = 0$. Jika disubstitusi untuk $\lambda = 0$ maka persamaan $\boldsymbol{G}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) = 0$ dan solusi fungsi $\boldsymbol{G}$ dinyatakan oleh $\mathbf{x}(0)$ diketahui sebagaisyarat awal. Jika disubstitusi untuk $\lambda = 1$ maka persamaan $\boldsymbol{G}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ dan solusi fungsi $\boldsymbol{G}$ dinyatakanoleh $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ tidak diketahui. Maka $\boldsymbol{G}$ dikatakan fungsihomotopy diantara

$$\boldsymbol{G}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$
$$\boldsymbol{G}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa fungsi homotopy $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x})$=0 kontinu, melalui proses solusi diketahui $\mathbf{x}(0)$ dari $\boldsymbol{G}(0, \mathbf{x})$=0 hingga solusi tidak diketahui $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ dari $\boldsymbol{G}(1, \mathbf{x}) = 0$ untuk memperoleh solusi persamaan $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$. Pertama diasumsikan bahwa fungsi $\mathbf{x}(\lambda)$ merupakan solusi tunggal persamaan $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = 0$, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$. Himpunan $\{\mathbf{x}(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ menyatakan suatu kurva dalam $\Re^n$ dari $\mathbf{x}(0)$ hingga $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ dengan λ sebagai parameter. Sepanjang kurva fungsi $\mathbf{x}(\lambda)$ dinyatakan oleh barisan dalam himpunan $\{\mathrm{x}(\lambda_i)\}_{k=0}^{m} = \{\mathrm{x}(\lambda_0), \mathrm{x}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{x}(\lambda_m)\}$, $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m = 1$. Sehingga kurva fungsi $\mathbf{x}(\lambda)$adalah kontinu untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ maka dapat dikatakan fungsi $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))=0$ juga kontinu. Oleh karena $\mathbf{x}(\lambda)$dan $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))$ kontinu dan jika fungsi $\mathbf{x}(\lambda)$dan $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))$ differensiabel terhadap λ maka

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathrm{x}} \mathbf{x}'(\lambda) = 0$$

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -\frac{\frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathrm{x}(\lambda))}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathrm{x}(\lambda))}{\partial \mathrm{x}}}$$

$$= -\left[\frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathrm{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda}$$

adalah suatu sistem persamaan differensial dengan syarat awal $\mathbf{x}(0)$.

Oleh karena, $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) + (\lambda - 1)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$ dan deferensiasi $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))$ terhadap $\mathbf{x}$ adalah

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \mathrm{x}}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \end{bmatrix} = J(\mathbf{x}(\lambda))$$

dimana $J(\mathbf{x}(\lambda))$ matrik Jacobian nonsingular dan diferensiasi $\boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))$ terhadap λ adalah $\frac{\partial \boldsymbol{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$,sehingga sistem persamaan differensial dapat dituliskan dalam bentuk$\mathbf{x}'(\lambda) = -\left[J(\mathbf{x}(\lambda))\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$,dengan syarat awal adalah $\mathbf{x}(0)$atau secara umum dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = -J(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathrm{x}(0)) \\ f_2(\mathrm{x}(0)) \\ \vdots \\ f_n(\mathrm{x}(0)) \end{bmatrix}$$

dimana

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{d\lambda} = \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Selanjutnya, digunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk menentukan solusi dari sistem persamaan differensial. Pertama, ditetapkan integer $N > 0$ dan $h = (1-0)/N$ dan interval [0,1] dipartisimenjadi N subinterval dengan titik-titik$\lambda_j = jh$, untuk setiap $j = 0,1, \ldots, N$. Misalkan $w_{i,j}$ pendekatan terhadap $x_i(\lambda_j)$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ dan $j = 0,1, \ldots, N$ dengan syarat awal $w_{1,0} = x_1(0)$, $w_{2,0} = x_2(0)$, ..., $w_{n,0}=x_n(0)$. Andaikan, $w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{n,j}$ sudah ditentukan maka dapat diperoleh $w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right)$ dimana

$$k_{1,i} = h\phi_i\left(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \cdots, w_{n,j}\right),$$
$$k_{2,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1,} w_{2,j}, + \frac{1}{2}k_{1,2,} \cdots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right),$$
$$k_{3,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1,} w_{2,j}, + \frac{1}{2}k_{2,2,} \cdots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right),$$
$$k_{4,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1,} w_{2,j}, + k_{3,2,} \cdots, w_{n,j} + k_{3,n}\right),$$

untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ dan $j = 0,1,\ldots,N$. Jika digunakan notasi vektor dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathrm{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ \vdots \\ k_{1,n} \end{bmatrix}, \mathrm{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ \vdots \\ k_{2,n} \end{bmatrix}, \mathrm{k}_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ \vdots \\ k_{3,n} \end{bmatrix}, \mathrm{k}_4 = \begin{bmatrix} k_{4,1} \\ k_{4,2} \\ \vdots \\ k_{4,n} \end{bmatrix}, \text{dan } w_j = \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n,j} \end{bmatrix}$$

$$\text{atau } \mathrm{k}_1 = h\begin{bmatrix} \phi_1\left(\lambda_{j,} w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}\right) \\ \phi_2\left(\lambda_{j,} w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}\right) \\ \vdots \\ \phi_n\left(\lambda_{j,} w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}\right) \end{bmatrix} = h\left[-\mathrm{J}\left(\mathrm{w}_{1,j,} \ldots, \mathrm{w}_{n,j}\right)\right]^{-1}$$

$$\mathbf{F}\,(\mathrm{x}\,(0) = h\left[-J(w_j)\right]^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}(0)\right),$$
$$\mathrm{k}_2 = h\left[-\mathrm{J}\left(\mathrm{w_j} + \tfrac{1}{2}\mathrm{k}_1\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\,(\mathrm{x}\,(0)),$$
$$\mathrm{k}_3 = h\left[-\mathrm{J}\left(\mathrm{w_j} + \tfrac{1}{2}\mathrm{k}_2\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\,(\mathrm{x}\,(0)),$$
$$\mathrm{k}_4 = h\left[-\mathrm{J}\left(\mathrm{w_j} + \mathrm{k}_3\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\,(\mathrm{x}\,(0)),$$

Sehingga, penyelesaian sistem persamaan differensial ditentukan oleh

$$\mathrm{x}(\lambda_{j+1}) = \mathrm{x}(\lambda_j) + \frac{1}{6}(\mathrm{k}_1 + 2\,\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4)$$
$$= \mathrm{w}_j + \frac{1}{6}(\mathrm{k}_1 + 2\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4)$$

yaitu $\mathrm{x}(\lambda_n) = \mathrm{x}(1)$ merupakan solusi approksimasi terhadap $\mathbf{x}^*$ yang tidak diketahui. Sebagai contoh, misalkan sistem persamaan nonlinier

$$f_1\left(x_1, x_{2,} x_3\right) = 3x_1 - cos(x_2x_3) - 0.5 = 0,$$
$$f_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(\mathrm{x}_3) + 1.06 = 0,$$
$$f_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

ditransformasikan kesistem persamaan differensial. Pertama, dari sistem persamaan nonlinier ditentukan matrik Jacobian

$$\mathrm{J}(x) = \begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2 sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & cos(x_3) \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1\,e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

Kedua, ditetapkan syarat awal $\mathrm{x}(0) = (0, 0, 0)^t$ sehingga $\mathrm{F}(\mathrm{x}(0)) = (-1.5,\ 0.25,\ 10\pi/3)^t$. Ketiga, substitusikan pada persamaan $\mathrm{x}'(\lambda) = -\left[J\left(\mathrm{x}(\lambda)\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\left(\mathrm{x}(0)\right)$ sehingga sistem persamaan nonlinier dalam bentuk sistem persamaan differensial

$$\begin{bmatrix} x_1'(\lambda) \\ x_2'(\lambda) \\ x_3'(\lambda) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2 sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & cos(x_3) \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1\,e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Pertama tentukan $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$ dan k_4 dengan N=4 dan h=0,25 yaitu,

$$\mathrm{k}_1 = h[-J(\mathrm{x}(0))]^{-1}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}(0))$$

$$= 0.25 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -16.2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ \frac{10\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$= (0.125, -0.004222203325, -0.1308996939)$$

$$\mathrm{k}_2 = h[-J(0.0625, -0.004222203325, -0.1308996939]^{-1} \left(-\frac{1.5, 0.25, 10\pi}{3}\right)^t$$

$$= 0.25 \begin{bmatrix} 3 & -0.9043289149 \times 10^{-5} & -0.2916936196 \times 10^{-6} \\ 0.125 & -15.85800153 & 0.9978589232 \\ 0.002111380229 & -0.06250824706 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

$$= (0.1249999773, -0.003311761993, -0.1309232406)^t$$

$$\mathrm{k}_3 = h[-J(0.06249998865, -0.001655880997, -0.0654616203)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= (0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)^t$$

$$\mathrm{k}_4 = h[-J(0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= (0.12499988945, -0.00230206762, -0.1309346977)^t$$

Sehingga diperoleh solusi persamaan differensial

$$\mathrm{x}(\lambda_1) = w_1 = w_0 + \frac{1}{6}[\mathrm{k}_1 + 2\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4]$$

$$= (0.1249999697, -0.00329004743, -0.1309202608)^t.$$

$$\mathrm{x}(\lambda_2) = w_2 = (0.2499997679, -0.004507400128, -0.2618557619)^t,$$

$$\mathrm{x}(\lambda_3) = w_3 = (0.3749996956, -0.003430352103, -0.3927634423)^t,$$

$$\mathrm{x}(\lambda_4) = \mathrm{x}(1) = w_4 = (0.4999999954,\ 0.126782 \times 10^{-7}, -0.5235987758)^t,$$

yang merupakan penyelesaian sistem persamaan nonlinier dalam bentuk approksimasi x $=(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^t$ yaitu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4999999954 \\ 0.126782 \times 10^{-7} \\ -0.5235987758 \end{bmatrix}$$

sedangkan solusi sebenarnya $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, x_3)^t$ adalah

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.52359877 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat dikatakan bahwa nilai approksimasi hampir sama nilai sebenarnya atau kesalahan sebenarnya sangat kecil yaitu $\mathrm{E}_t = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ dimana $\mathrm{E}_{t,x_1} = x_1 - \dot{x}_1 0.5 - 0.4999999954$

$$= 0.0000000046$$

$$\mathrm{E}_{t,x_2} = x_2 - \dot{x}_2 = 0.0 - 0.126782 \times 10^{-7}$$

$$= -0.126782 \times 10^{-7}$$

$$\mathrm{E}_{t,x_3} = x_3 - \dot{x}_3$$

$$= -0.52359877 - (-0.5235987758) = 5.8^{-9}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan pada fungsi homotopy kontinu dan differensiabel dapat disimpulkan;

Pertama, fungsi homotopy mentransformasikan sistem persamaan nonlinier kebentuk sistem persamaan differensial. Kedua, solusi approksimasi yang diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat hampir sama dengan solusi sebenarnya dengan faktor kesalahan relatif sangat kecil.

DAFTAR PUSTAKA

Allgower,E. and Georg K. 1990. Numerical Continuation Methods: an introduction, Springer-Verlag, New York.

Ascher, U. M. , R. M. M. Mattheij, and R. B. Russell, 1988. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, EnglewoodCliffs, NJ.

Hoffman, Joe D. 2001. Numerical Methods for Engineers and Scientists, Second EditionRevised and Expanded, by Marcel Dekker. Inc. New York.

MacCamy,R. C. & Mizel, V. J. 1969. Linear Analysis and Differensial Equations, TheMacmillan Company, Printed in the United States of America.